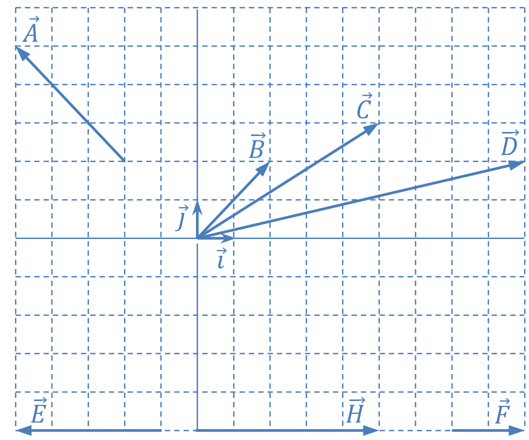
Série N° 1 – Calcul Vectoriel & Analyse Dimensionnelle

I. Analyse Vectorielle

Dans tout ce qui suit, on considère un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1

Soient les vecteurs sur la figure ci-contre.



1. Représenter géométriquement les vecteurs suivants :
   $\vec{X} = \vec{A} + \vec{B}$; $\vec{Y} = \vec{C} - \vec{B}$; $\vec{W} = \vec{D} - \vec{C}$; $\vec{N} = \vec{W} - \vec{Y}$;
   $\vec{Z} = \vec{H} + \vec{E}$; $\vec{V} = \vec{H} - \vec{F}$; $\vec{U} = \vec{H} + \vec{F}$.
2. Déduire les composantes des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

Exercice 2

Soient deux vecteurs $\vec{U} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ et $\vec{V} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ puis calculer leurs modules.
2. Donner les composantes des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ respectivement.
3. Calculer $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$.
4. Déduire l'angle $\theta = \widehat{\vec{U}, \vec{V}}$ ainsi que l'aire du parallélogramme formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

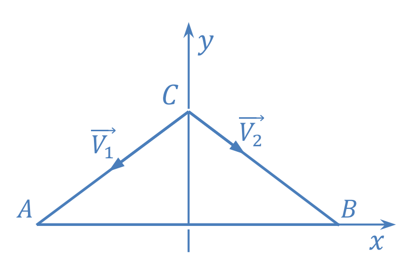
Exercice 3

Considérant les vecteurs $\vec{V} = (2x - 3)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{F} = (x - 1)\vec{\imath} + (x - 1)\vec{\jmath}$.

1. Donner, en fonction de x, les expressions de $\vec{V} \cdot \vec{F}$ et $\vec{V} \wedge \vec{F}$.
2. Quelle est la valeur de x pour laquelle les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{F}$ soient perpendiculaires ?
3. Quelle est la valeur de x pour laquelle les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{F}$ soient parallèles ?

Exercice 4

On définit trois points $A(-4,0)$, $B(4,0)$ et $C(0,3)$.



1. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les composantes des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB}$ respectivement.
3. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1} = a\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{V_2} = b\overrightarrow{u_2}$ tels que a et $b \in R^2$. Donner, en fonction de a et b, les composantes de la résultante $\vec{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$. Calculer l'angle $\theta = \widehat{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}}$.

Exercice 5

Soient, dans l'espace cartésien, la fonction scalaire $F(x,y,z) = 3x^3 - 2xy^2 + y^2z + 5xyz^2$ et le vecteur champ $\vec{C}(x,y,z) = 2(y^3 + z^2)\vec{\imath} + (x + 5y)\vec{\jmath} + (3x + y^2 - 2z)\vec{k}$.

- Calculer $\overrightarrow{grad}\, F$, $Div\,\vec{C}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{C}$.

Exercice 6

Soit le vecteur $\overrightarrow{U_r}$ de la figure ci-contre. On suppose que l'angle θ varie en fonction du temps et que $\left\|\overrightarrow{U_\theta}\right\| = 1$.

1. Trouver les composantes de $\overrightarrow{U_r}$ et $\overrightarrow{U_\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$.
2. Calculer $\overrightarrow{U_r} \cdot \overrightarrow{U_\theta}$ et représenter $\overrightarrow{U_\theta}$.

II. Analyse Dimensionnelle

Exercice 1

On considère les grandeurs physiques m, d, v, a et t aux dimensions $[m] = M$, $[d] = L$, $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$ et $[t] = T$.

En supposant que les équations suivantes sont dimensionnellement homogènes, trouver la dimension des grandeurs physiques F, K, p, W et L telles que :

$$F = ma\ ;\ E = \frac{1}{2}mv^2\ ;\ p = mv\ ;\ W = mad\ ;\ L = mvd.$$

Exercice 2

Vérifier si les équations suivantes sont dimensionnellement homogènes, sachant que v est la vitesse, a est l'accélération, t est le temps (s) et x est la position.

1. $x = t^2/(2a)$.
2. $x = 0{,}5\, a^2vt$.
3. $x = 0{,}5\, at^2$.
4. $x = v^2/(2a)$.

Exercice 3

Dans un gaz, une particule de masse m animée d'une vitesse v, enfermée dans une boite cubique d'arrête a, a une énergie cinétique E_c, telle que : $E_c = \frac{h^2}{32\pi^2ma^2}n^2$, où n représente un nombre entier sans dimension.

- En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de h.

Exercice 4

Un solide de masse m est suspendue à un ressort de constante de raideur K.

Trouver l'expression de l'accélération gravitationnelle en supposant que sa formule est $g = Cm^x X^y K^z$. Où C est une constante sans dimension et X est l'élongation du ressort à l'équilibre.

On donne : $[K] = MT^{-2}$.

Exercice 5

Soit un gaz enfermé dans un récipient, la pression P qu'exerce ce gaz est due aux chocs des molécules sur la paroi du récipient. P dépend 'à priori' de la densité n du gaz (n est le nombre de molécules$/m^3$), de la masse m de chaque molécule et de la vitesse moyenne $\bar{v}$ des molécules.

- En utilisant l'analyse dimensionnelle trouver la formule de la pression P.